

## سبد سهام میانگین-واریانس مبتنی بر پیش‌بینی ماتریس کواریانس با شبکه‌های LSTM با رهیافت تجزیه چولسکی

امیر محمدزاده<sup>†</sup>

سیف‌اله حیدری<sup>\*</sup>  
سهیلا خویشتن‌دار<sup>‡</sup>

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۱/۲۶

### چکیده

مدل میانگین-واریانس بر مبنای کمیته‌سازی ریسک در سطوح مختلف بازده موردانتظار بنا شده است. کلید موفقیت در این رویکرد به پیش‌بینی دقیق و پویای بردار بازده و ماتریس کواریانس میان دارایی‌ها وابسته است، زیرا این روابط دائم تغییر می‌کنند و درک این پویایی برای دستیابی به سبدی بهینه امری حیاتی است. پژوهش حاضر از شبکه‌های حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت (LSTM) برای پیش‌بینی پویای ماتریس کواریانس استفاده می‌کند و نوآوری آن در زمینه رفع مشکل عدم‌مثبت معین‌بودن ماتریس کواریانس پیش‌بینی‌شده در استفاده از رویکرد تجزیه چولسکی است. در این پژوهش رویکرد میانگین-واریانس برای بهینه‌سازی سبد سهامی متشکل از ده شاخص عمده بورس تهران در بازه زمانی ۱۳۹۰ تا خرداد ۱۴۰۴، با مقایسه سه مدل شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت با رهیافت تجزیه چولسکی، پنهان مارکوف، و دی سی سی گارچ موردارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان داد مدل LSTM با میانگین بازده هفتگی ۰/۰۵۰، ریسک ۰/۰۳۸، نسبت شارپ ۰/۱۳، و بازده تجمعی ۲/۴۲ برتری قابل توجهی نسبت به دو مدل دیگر در کنترل ریسک و سودآوری داشته است. این برتری، ناشی از توانایی LSTM در مدل‌سازی الگوهای پیچیده و پویای بازار سرمایه ایران است.

**واژه‌های کلیدی:** شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت، تجزیه چولسکی، مدل پنهان مارکوف،

مدل دی سی سی گارچ

طبقه‌بندی JEL: G11, C45, C53, C61, G17

<sup>\*</sup> دانشجوی دکترا، دانشگاه آزاد قزوین، دانشکده مدیریت و حسابداری، ۴۰۵۱۱۰۷۶۶۳@iaui.ac.ir  
مقاله برگرفته از رساله دکترا سیف‌اله حیدری می‌باشد.

<sup>†</sup> استاد، دانشگاه آزاد قزوین، دانشکده مدیریت و حسابداری (نویسنده مسئول) 126@iaui.ac.ir  
<sup>‡</sup> استادیار، دانشگاه آزاد قزوین، دانشکده مدیریت و حسابداری، 126@iaui.ac.ir

## ۱ مقدمه

سرمایه‌گذاری و انباشت سرمایه در تحول اقتصادی کشورها نقش بسزایی داشته است. بدون شک، بورس یکی از مناسب‌ترین جایگاه‌ها برای جذب سرمایه‌های کوچک و استفاده از آن‌ها برای رشد یک شرکت در سطح کلان و نیز رشد شخصی فرد سرمایه‌گذار است. از آنجا که هدف و تعریف سرمایه‌گذاری به تعویق انداختن مصرف برای مصرف بیشتر و بهتر در آینده است؛ افراد با سرمایه‌گذاری انتظار دستیابی به سود مورد انتظار خود را دارند. نظریه سبد سهام یکی از مهم‌ترین ابزارهای مدیریتی در زمینه کنترل سرمایه در بازارهای مالی است.

بهینه‌سازی سبد سهام یکی از مهم‌ترین مسائل در حوزه مالی و مدیریت سرمایه‌گذاری به شمار می‌رود که هدف اصلی آن تخصیص بهینه منابع مالی میان مجموعه‌ای از دارایی‌ها، به گونه‌ای است که یا سطح ریسک در ازای بازده مورد انتظار حداقل شود یا بازده مورد انتظار با در نظر گرفتن سطح معینی از ریسک به حداکثر برسد. این مسئله به دلیل نقش بنیادین آن در تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری، همواره مورد توجه پژوهشگران و فعالان بازارهای مالی بوده است. با وجود اهمیت و کاربرد گسترده رویکردهای سنتی در این حوزه، این روش‌ها در مواجهه با پیچیدگی‌های فزاینده، پویایی‌های ساختاری و نوسانات ذاتی بازارهای مالی نوین با محدودیت‌های قابل توجهی روبه‌رو هستند.

در سال‌های اخیر، پیشرفت‌های چشمگیر در حوزه هوش مصنوعی، به ویژه در زمینه یادگیری ماشین و یادگیری عمیق، افق‌های نوینی را برای توسعه مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام فراهم کرده است. این فناوری‌ها با بهره‌گیری از توانایی یادگیری الگوهای پیچیده، استخراج روابط پنهان و انطباق با تغییرات محیطی، ظرفیت قابل توجهی برای رفع کاستی‌های روش‌های کلاسیک ارائه می‌دهند (اقتصاد و محمدی، ۱۴۰۲).

بازارهای سرمایه امروزی با ویژگی‌هایی نظیر حجم عظیم داده‌ها، وجود نویز و عدم قطعیت بالا، وابستگی‌های زمانی و مکانی، و روابط پیچیده و غیرخطی میان متغیرها و دارایی‌های مالی شناخته می‌شوند. در چنین شرایطی، بسیاری از مدل‌های کلاسیک بهینه‌سازی بر مفروضات ساده‌کننده‌ای همچون نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها، ثبات پارامترهای آماری و وجود روابط خطی میان متغیرها استوار هستند؛ مفروضاتی که در عمل، به ویژه در بازارهای مالی پویا و پرتلاطم، به ندرت برقرارند. در مقابل، مدل‌های مبتنی بر هوش مصنوعی با اتکا بر قابلیت یادگیری از داده‌های تاریخی و برخط، شناسایی الگوهای پنهان و مدل‌سازی روابط غیرخطی و پیچیده، توانایی بیشتری در بازنمایی رفتار واقعی بازارهای مالی داشته و از این‌رو

می توانند عملکرد مؤثرتری در فرآیند بهینه سازی سبب سهام ارائه دهند (اسفندیار و همکاران، ۱۴۰۱).

یکی از مدل های معروف و پرکاربرد در نظریه سبب سهام، سبب سهام میانگین-واریانس<sup>۱</sup> یا سبب سهام مارکویتز<sup>۲</sup> است. پژوهش های زیادی به بررسی سودآوری و استوارسازی این دیدگاه پرداخته اند و نسخه های مختلفی از این مدل بهینه سازی سبب سهام را گسترش داده اند. در این مدل، دو پارامتر، میانگین بازده و ماتریس کواریانس بازده دارایی های سبب، وجود دارد که باید توسط داده های آماری یا تحلیل روبه جلو برآورد شود. برآورد ثابت این پارامترها بدون در نظر گرفتن زمان با ذات پویا و غیرخطی بازارهای مالی در تناقض است. رویکردهای مختلفی در برآورد پویای این پارامترها در ادبیات مالی توسعه داده شده است که غالباً در مورد پارامتر میانگین بازده دارایی ها بوده است و ماتریس کواریانس کمتر مورد توجه قرار گرفته است. پژوهش حاضر، براساس رویکرد یادگیری ماشین از نوع عمیق و با استفاده از شبکه های حافظه بلندمدت و کوتاه مدت (LSTM)<sup>۳</sup> برای پیش بینی پویای بازده و ماتریس کواریانس اقدام کرده است. ایده اصلی و نوآوری پژوهش، پیش بینی ماتریس کواریانس با شبکه های حافظه بلندمدت و کوتاه مدت با رهیافت تجزیه چولسکی<sup>۴</sup> به منظور تضمین مثبت معین بودن ماتریس خروجی است. در پایان، نتایج سودآوری مدل پژوهش با رویکردهای مارکوف پنهان و مدل DCC-GARCH<sup>۵</sup> مقایسه می شود.

## ۲ مبانی نظری و پیشینه پژوهش

تحقیقات زیادی نشان داده اند که سیستم های غیرخطی در پیش بینی سیستم های پیچیده، از جمله قیمت سهام موفقیت بیشتری داشته اند. سیستم های غیرخطی انعطاف بیشتری در مدل سازی داده ها و درک ساختار و روابط پیچیده بین متغیرها دارند. یکی از این مدل های پرکاربرد غیرخطی، شبکه های عصبی<sup>۶</sup> هستند (لی<sup>۷</sup>، ۲۰۲۵). این سیستم ها از بدن انسان الهام گرفته اند و برای مدل سازی از مفاهیمی همچون نرون و توابع برانگیختگی استفاده

<sup>1</sup> mean-variance portfolio

<sup>2</sup> Markowitz portfolio

<sup>3</sup> Long Short Term Memory: LSTM

<sup>4</sup> Cholesky factorization

<sup>5</sup> Dynamic Conditional Correlation

<sup>6</sup> neural network

<sup>7</sup> Li

می‌کنند. شبکه‌های عصبی مصنوعی برای دستیابی به عملکرد مطلوب، نیازمند فرایند آموزش هستند؛ فرایندی که طی آن پارامترهای ساختاری و وزن‌های شبکه به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که خطای مدل به حداقل رسیده و قابلیت تعمیم آن به داده‌های جدید افزایش یابد. بهینه‌سازی این پارامترها، یکی از ارکان اساسی در توسعه مدل‌های کارآمد یادگیری ماشین محسوب می‌شود و نقش تعیین‌کننده‌ای در دقت، پایداری و کارایی مدل ایفا می‌کند. در این راستا، یادگیری عمیق به عنوان یکی از شاخه‌های پیشرفته یادگیری ماشین، جایگاه ویژه‌ای در توسعه سامانه‌های هوشمند یافته است. یادگیری عمیق مجموعه‌ای از الگوریتم‌های مبتنی بر شبکه‌های عصبی چندلایه است که با بهره‌گیری از ساختارهای سلسله‌مراتبی، قادر به استخراج و مدل‌سازی بازنمایی‌های انتزاعی و پیچیده از داده‌ها در سطوح مختلف هستند. این رویکرد با الهام از سازوکار پردازش اطلاعات در مغز انسان و با تکیه بر پیشرفت‌های چشمگیر در توان محاسباتی، پردازنده‌های گرافیکی و فناوری‌های نوین پردازش داده، تحولات بنیادینی در حوزه هوش مصنوعی ایجاد کرده و در طیف گسترده‌ای از مسائل، از جمله بینایی ماشین، پردازش زبان طبیعی، تشخیص الگو، تحلیل داده‌های مالی و سیستم‌های تصمیم‌یار، عملکردی فراتر از روش‌های سنتی به نمایش گذاشته است. از مهم‌ترین مزایای مدل‌های یادگیری عمیق می‌توان به قابلیت استخراج خودکار ویژگی‌ها بدون نیاز به مهندسی دستی ویژگی، توانایی یادگیری نمایش‌های سلسله‌مراتبی از داده‌ها، دقت پیش‌بینی بالا، قدرت تعمیم مناسب در مواجهه با داده‌های ناشناخته، توانایی مدل‌سازی روابط پیچیده و غیرخطی، مقیاس‌پذیری در پردازش داده‌های حجیم، بهره‌مندی از زیرساخت‌های گسترده سخت‌افزاری و نرم‌افزاری، و ظرفیت بالای توسعه برای کاربردهای نوظهور اشاره کرد. این ویژگی‌ها سبب شده‌اند که یادگیری عمیق به یکی از مؤثرترین رویکردها در حل مسائل پیچیده بهینه‌سازی، پیش‌بینی و تصمیم‌گیری در حوزه‌های مختلف علمی و صنعتی تبدیل شود.

یکی از شبکه‌های عصبی عمیق که برای پردازش داده‌های دنباله‌ای یا وابسته به زمان مورد استفاده قرار می‌گیرد، شبکه‌های بازگشتی<sup>۱</sup> است. چالش این مدل در این است که با زیاد شدن تعداد داده‌های آموزشی، گذشته خود یا زمینه بحث را فراموش می‌کند. برای رفع این نقیصه، شبکه‌های حافظه طولانی مدت و کوتاه مدت به وجود آمده‌اند که توسط یک سلول حافظه گذشته را به خاطر می‌سپارند یا بخشی از آن را فراموش می‌کنند (لی، ۲۰۲۵).

<sup>۱</sup> recurrent neural network

درمجموع، شبکه‌های حافظه طولانی مدت و کوتاه مدت رده‌ای از شبکه‌های عصبی عمیق‌اند که معمولاً برای پردازش بر ورودی‌های دنباله‌ای در یادگیری ماشین استفاده می‌شوند. مدل بهینه‌سازی سبد سهام میانگین-واریانس نیازمند تخمین دقیق و پویای دو پارامتر بازده موردانتظار دارایی‌ها و ماتریس کواریانس است. پژوهش‌های اخیر در حوزه مدیریت مالی و بهینه‌سازی سبد سهام به‌طور فزاینده‌ای به سمت استفاده از قابلیت‌های پیش‌بینی و تصمیم‌گیری الگوریتم‌های یادگیری ماشین و یادگیری عمیق حرکت کرده‌اند تا از محدودیت‌های مدل‌های سنتی، به‌ویژه در بازارهای مالی پیچیده عبور کنند (آگال و همکاران<sup>۱</sup>، ۲۰۲۵). شبکه‌های حافظه طولانی مدت و کوتاه مدت برای تحلیل سری‌های زمانی بازده دارایی‌ها استفاده می‌شوند و می‌توانند وابستگی‌های زمانی بلندمدت را ثبت کنند. با فرض پویایی ماتریس کواریانس، شبکه‌های حافظه طولانی مدت و کوتاه مدت می‌توانند به‌عنوان ابزاری برای مدل‌سازی ماتریس کواریانس دارایی‌های سبد مارکویتز نیز مورد استفاده قرار گیرند. بااین‌همه، نکته فنی مهمی وجود دارد: در آمار، ماتریس کواریانس متقارن و مثبت معین است و استفاده از این شبکه‌ها برای تخمین ماتریس کواریانس به خروجی ماتریسی منجر می‌شود که ویژگی مثبت معین بودن را ندارد.

از آنجا که ممکن است ماتریس کواریانس پیش‌بینی‌شده به دلیل پیچیدگی مدل‌های یادگیری عمیق خاصیت مثبت معین بودن خود را از دست بدهد، تلاش برای محاسبه آن ریسک‌های نامعتبری را به همراه دارد. پژوهش حاضر برای مواجهه با این چالش از یک نوآوری استفاده کرده و آن رهیافت تجزیه چولسکی ماتریس کواریانس است. تجزیه چولسکی روشی پایه‌ای در جبر خطی عددی است که ماتریس‌های متقارن و مثبت معین را به حاصل ضرب یک ماتریس پایین مثلثی در ترانزپوز آن تجزیه می‌کند. از این رو، به جای پیش‌بینی مستقیم ماتریس کواریانس، ماتریس پایین مثلثی پیش‌بینی می‌شود و سپس ماتریس کواریانس اصلی از حاصل ضرب پیش‌بینی ماتریس پایین مثلثی در ترانزپوز آن بازسازی می‌شود. بنابراین، تجزیه چولسکی همانند فیلتر اعتبارسنجی اجباری عمل می‌کند؛ اگر ماتریس نامعتبر تشخیص داده شود، سیستم از مرحله منظم‌سازی برای بازیابی خاصیت مثبت معین بودن استفاده می‌کند. بدین صورت، مدل اصلی پژوهش با توجه به تاریخچه ماتریس کواریانس (به عنوان یک سری زمانی) از شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه مدت برای پیش‌بینی ماتریس کواریانس در افق زمانی آتی سبد سهام بهره می‌برد.

<sup>1</sup> Agal et al.

در پژوهش حاضر، دو رویکرد پرکاربرد دیگر در زمینه تخمین پارامتر کواریانس نیز به کار خواهد رفت؛ یعنی مدل پنهان مارکوف (HMM)<sup>۱</sup> و DCC-GARCH. بدین ترتیب، نتایج سودآوری سبدهای بهینه حاصل از رویکرد پژوهش با این دو مدل مقایسه می‌شود.

مدل مارکوف پنهان، یک چهارچوب آماری قدرتمند است که برای مدل‌سازی سری‌های زمانی طراحی شده و در آن مشاهدات قابل‌رؤیت، تابعی از فرایندی زیربنایی به‌شمار می‌آیند که مستقیماً قابل‌اندازه‌گیری نیستند. این مدل بر پایه دو ایده کلیدی بنا شده است: ابتدا، سیستم در هر لحظه در یکی از  $N$  حالت مجزا قرار دارد. ثانیاً، خاصیت مارکوفی که بیان می‌کند حالت فعلی تنها به حالت بلافاصله قبلی وابسته است، نه کل تاریخچه. انتقال بین این حالت‌های پنهان توسط یک ماتریس احتمال کنترل می‌شود و هر حالت پنهان نیز یک توزیع احتمال مجزا برای تولید داده‌های مشاهده‌پذیر (مانند بازده سهام یا نوسانات بازار) فراهم می‌کند. اهمیت مدل پنهان مارکوف در حوزه مالی بسیار زیاد است، زیرا بازارهای مالی به ماهیت خود ایستا نیستند؛ به این معنا که میانگین بازده، واریانس، و هم‌بستگی بین دارایی‌ها در طول زمان تغییر می‌کند. مدل پنهان مارکوف این واقعیت را به شکلی طبیعی مدل‌سازی می‌کند و به سرمایه‌گذاران اجازه می‌دهد رژیم‌های مختلف بازار را تشخیص دهند. این رژیم‌ها می‌توانند به صورت حالت‌های صعودی (با بازده بالا و ریسک کم) یا حالت‌های نزولی و بحرانی (با نوسان بالا) تفسیر شوند (ماجومدر و نیرچال<sup>۲</sup>، ۲۰۲۴). توانایی تشخیص حالت امکان بهبود چشمگیری در بهینه‌سازی سبد سهام را فراهم می‌آورد. در روش‌های سنتی، مانند مارکوویتز، یک ماتریس کواریانس واحد فرض می‌شود؛ اما مدل پنهان مارکوف به ما اجازه می‌دهد تا برای هر رژیم پارامترهای آماری متمایزی را تخمین بزنیم. این امر به تخصیص دارایی پویا منجر می‌شود.

مدل DCC-GARCH را رابرت انگلت<sup>۳</sup> در ۲۰۰۲ معرفی کرد. این مدل رویکردی قدرتمند و انعطاف‌پذیر برای مدل‌سازی ماتریس کواریانس شرطی در سبدهای مالی است. این مدل که توسعه‌ای از مدل‌های GARCH استاندارد و CCC-GARCH به‌شمار می‌رود، توانایی زیادی در ثبت و تحلیل پویایی هم‌بستگی‌ها بین دارایی‌های مالی در طول زمان دارد. مزیت کلیدی مدل DCC-GARCH در این است که واریانس (نوسان‌پذیری) شرطی هر

<sup>۱</sup> Hidden Markov Model: HMM

<sup>۲</sup> Majumder & Neerchal

<sup>۳</sup> Robert Englett

دارایی را به صورت مجزا مدل سازی کرده و سپس هم بستگی شرطی بین دارایی ها را به عنوان یک مدل مستقل و پویا پیاده سازی می کند. این تفکیک مدل را هم از نظر محاسباتی قابل مدیریت می سازد و هم به آن امکان ثبت پدیده های پیچیده بازار، مانند افزایش ناگهانی هم بستگی در زمان بحران ها را می دهد (کوپن و یوگوپوسیتو<sup>۱</sup>، ۲۰۲۵).

در ادامه، به پیشینه برخی از تحقیق هایی پرداخته می شود که در آن از ابزارهای هوش مصنوعی و یادگیری عمیق در خلال پیش بینی و بهینه سازی سبد سهام استفاده شده است. هراتی زاده و رضایی (۱۴۰۲) در پژوهشی با عنوان «ارائه روشی جدید برای بهره گیری از یادگیری ماشین در فرایند بهینه سازی سبد سهام» بر دو مرحله به طور مجزا اما متوالی تأکید کرده اند. ایشان چهارچوب نوآورانه «Per-Learner» را معرفی کردند که از دو مدل یادگیری ماشین مجزا استفاده می کند؛ مدل اول وظیفه انتخاب بهینه سهام را بر عهده دارد و مدل دوم، با پیش بینی های خود وزن های بهینه برای سرمایه را در سبد منتخب تعیین می کند. این رویکرد دو مرحله ای در ارزیابی ها نشان داد که می تواند بازده تجمعی سبد سهام را نسبت به سایر روش های موجود تا حد زیادی ارتقا دهد.

کیانی زاده و همکاران (۱۴۰۲) در پژوهشی با تمرکز بر روش داده کاوی به مقایسه مدل های منتخب یادگیری ماشین (شامل شبکه عصبی، رگرسیون لجستیک، نزدیک ترین همسایه، ماشین بردار پشتیبان، و اعتبارسنجی ضربدری) برای پیش بینی قیمت سهام در دوازده شرکت منتخب بورس اوراق بهادار تهران (از طریق روش حذف سیستماتیک انتخاب شده بودند) در قالب مدل های یادگیری ماشین پرداختند. نتایج نشان داد از بین الگوریتم های یادگیری ماشین، الگوریتم ماشین بردار پشتیبان بیشترین قدرت پیش بینی کنندگی در قیمت سهام را به خود اختصاص داده است.

اقتصاد و محمدی (۱۴۰۲) در پژوهش خود با عنوان «بهینه سازی سبد سرمایه گذاری به کمک پیش بینی بازده موردانتظار با استفاده از روش های شبکه عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه مدت، جنگل تصادفی و آریمما»، ایده نوآورانه ای را مطرح کردند. آن ها استدلال می کنند که تأکید بر پیش بینی پذیری گزینه های سرمایه گذاری (علاوه بر سود و ریسک سنتی) برای سرمایه گذاران حیاتی است. پژوهش آن ها براساس داده های پنج ساله پنج صنعت بورسی (بانکی، خودرویی، دارویی، فلزی، و نفتی) انجام شد. نتایج تجربی نشان داد که مدل های بهینه سازی میانگین-واریانس در مقایسه با سایر مدل های پیش بینی (مانند آریمما یا شبکه عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه مدت) زمانی عملکرد بهتری دارند که بازده موردانتظار با

<sup>1</sup> Kevin & Yugopuspito

استفاده از مدل جنگل تصادفی پیش‌بینی شده باشد. این پژوهش برتری مدل‌های یادگیری ماشین بر مدل‌های سری زمانی سنتی را در حوزه پیش‌بینی برای بهینه‌سازی اثبات می‌کند. اسفندیار و همکاران (۱۴۰۱) با تمرکز بر رویکرد یادگیری تقویتی به بهینه‌سازی سبد سهام پرداختند. یافته‌های تحقیق در دوره‌های صعودی و نزولی بازار نشان داد که رویکرد یادگیری تقویتی در بازارهای صعودی و نزولی به‌صورت معناداری بر رویکرد خرید و نگهداری برتری دارد و عملکرد بهتری ارائه داده است و نتایج با عملکرد الگوریتم‌ها در بازارهای بورس سازگار است. نتایج آشکار کرد که از دیدگاه سودآوری، رویکرد یادگیری تقویتی نسبت به رهیافت خرید و نگهداری، عملکرد بهتر و مؤثرتری داشته است؛ بنابراین به کارگیری روش یادگیری تقویتی پیشنهاد می‌شود.

آگال و همکاران (۲۰۲۵) یک چهارچوب یادگیری ماشینی برای تخصیص دارایی مبتنی بر ریسک در بهینه‌سازی سبدسهم ارائه کردند که از شبکه‌های شبکه عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت برای پیش‌بینی نوسان و لایه‌های بودجه‌ریزی ریسک قابل‌مشق بهره می‌برد تا وزن‌های سبد را به‌صورت پویا تحت قیود ریسک تنظیم کند. این روش باتوجه به شاخص‌های واقعی بازار، مانند انتظارات نوسان و اسپردهای اعتباری، ریسک هدف را به‌روز می‌کند و فراتر از رویکردهای سنتی با کواریانس ثابت عمل می‌کند. نتایج آزمایش‌های تجربی نشان داد که چهارچوب پیشنهادی شارپ بهتری را نسبت به استراتژی‌های سنتی و روش‌های یادگیری عمیق موجود ارائه می‌دهد، بخصوص در شرایط بازار پرنوسان.

کون و یوگوپوسیتو (۲۰۲۵) روش ترکیبی جدیدی را با ادغام پیش‌بینی‌های شبکه عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت و الگوریتم یادگیری تقویتی برای بهینه‌سازی پویای سبد سهام معرفی کردند. هدف این مطالعه افزایش قابلیت تطبیقی مدل در فضاهای اعمال پیوسته و بهره‌گیری از وابستگی‌های زمانی داده‌های مالی بود. در این روش، شبکه عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت وابستگی‌های زمانی قیمت‌ها را پیش‌بینی کرده و عامل الگوریتم یادگیری تقویتی وزن‌های دارایی را تنظیم می‌کند. ارزیابی مدل در داده‌های دارایی‌های مختلف نشان داد که این معماری ترکیبی در مقایسه با روش‌های مرجع، بازده سالانه بالاتر و مقاومت بیشتری در برابر رژیم‌های بازار غیرایستا دارد.

لی (۲۰۲۵) نشان داد که استفاده از مدل شبکه‌های حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت برای پیش‌بینی قیمت و نوسان می‌تواند در تعیین وزن‌های سبدسهم کمک کند و بازده تجمعی قابل‌توجهی در دوره‌های آزمایشی به‌دست آورد. این مطالعه به‌طور مستقیم مدل شبکه‌های حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت را با دو استراتژی کمینه‌سازی واریانس و بیشینه‌سازی نسبت شارپ ترکیب کرد و نتایج نشان داد که رویکرد مبتنی بر شبکه‌های حافظه بلندمدت و

کوتاه مدت بازده های بسیار بالاتری از شاخص های بازار پایه ارائه می دهند که نشان دهنده ارزش افزوده این روش های یادگیری عمیق در ساخت سبد سهام است.

فن<sup>۱</sup> (۲۰۲۵) یک رویکرد ترکیبی از مدل شبکه های حافظه بلند مدت و کوتاه مدت و مدل میانگین-واریانس را برای بهینه سازی سبد سهام معرفی کرد. در این مطالعه، از مدل شبکه های حافظه بلند مدت و کوتاه مدت برای پیش بینی بازده های آینده با بهره گیری از داده های تاریخی استفاده شد و سپس این پیش بینی ها به مدل سنتی میانگین-واریانس داده شد تا سبد بهینه ساخته شود. نتایج نشان می دهد که این روش ترکیبی در داده های طولانی مدت FTSE 100 نسبت به مدل های مرجع عملکرد بهتری دارد، که اهمیت تلفیق روش های یادگیری عمیق با تئوری سبد کلاسیک را برجسته می کند.

تالی چارد<sup>۲</sup> (۲۰۲۵) از مدل پنهان مارکوف برای شناسایی رژیم های نوسان در بازار اوراق بهادار با درآمد ثابت استفاده کرد تا به تخصیص بهینه دارایی ها در بازارهای با نوسان بالا و پایین بپردازد. این روش نشان داد که مدیریت رژیم های بازار به بهبود بازده تعدیل شده با ریسک نسبت به روش های بدون در نظر گرفتن رژیم منجر می شود، که اهمیت کاربرد مدل پنهان مارکوف در بازارهای متنوع مالی را افزایش می دهد.

ماجومدر و نیرچال<sup>۳</sup> (۲۰۲۴) به توسعه یک مارکوف پنهان چندمتغیره برای انتخاب سبد سهام پرداختند. هدف آن ها شناسایی رژیم های بازار (مانند دوره های گاوی و خرسی) در داده های تاریخی سهام S&P 500 با استفاده از مدل پنهان مارکوف های مرتبط بود تا بتوانند سبد بهینه ای با توجه به این رژیم ها بسازند. نتایج نشان داد که سبدهای به دست آمده از مدل مارکوف پنهان چندمتغیره می توانند بازده سالانه ای مشابه یا بهتر از شاخص بازار ارائه کنند، که نشان دهنده توانایی مدل پنهان مارکوف در استفاده از ساختارهای پنهان بازار برای تصمیم گیری تخصیص دارایی است.

فرناندز و همکاران<sup>۴</sup> (۲۰۲۴) به بررسی سیستماتیک کاربرد الگوریتم های یادگیری تقویتی در بهینه سازی سبد سهام پرداختند. هدف تحقیق مقایسه ساختارهای مختلف یادگیری تقویتی، مانند DQN، DDPG، PPO، و SAC بود تا تأثیر آن ها بر بهره وری سبد سهام در دوره های زمانی و سیگنال های مختلف بازار سنجیده شود. نتایج این مطالعه نشان داد که

<sup>1</sup> Fan

<sup>2</sup> Taljaard

<sup>3</sup> Majumder & Neerchal

<sup>4</sup> Fernández et al.

مدل‌های یادگیری تقویتی عمیق نسبت به روش‌های آماری سنتی توانایی بهتری در یادگیری سیاست‌های تخصیص پویا و تطبیق با تغییرات بازار دارند و می‌توانند ریسک‌بازده سبد را بهبود دهند.

لی و لیو<sup>۱</sup> (۲۰۲۳) تلاش کردند تا مدل شبکه‌های حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت را برای پیش‌بینی بازده سهام به کار ببرند و سپس نتایج پیش‌بینی را در مدل بهینه‌سازی میانگین-واریانس وارد کنند تا وزن‌های بهینه سبد تعیین شود. آن‌ها مشاهده کردند که سبد بهینه‌شده با کمک پیش‌بینی‌های شبکه‌های حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت از نظر بازده و ریسک، عملکرد بهتری نسبت به شاخص S&P 500 دارد که نشان‌دهنده توانایی این ترکیب یادگیری عمیق و روش‌های کلاسیک برای بهبود ساخت سبد است.

### ۳ مدل پژوهش

در این بخش، ابتدا به معرفی مدل میانگین-واریانس مارکویتز پرداخته می‌شود. فرض کنیم سبد سهام از  $n$  دارایی تشکیل شده است که امید ریاضی یا میانگین بازده دارایی  $i$  ام برای افق زمانی سبد سهام برابر  $\mu_i$  و کواریانس بین دو دارایی  $i$  و  $j$  برابر  $\sigma_{ij}$  است. هدف مدل سبد سهام میانگین-واریانس، کمینه‌سازی ریسک در ضمن برآورد سطحی حداقلی از بازده موردانتظار است. در صورتی که حداقل سطح بازده موردانتظار سرمایه‌گذار برابر  $\tau$  باشد آنگاه مدل میانگین-واریانس به صورت مدل (۱) است.

$$\begin{aligned} \min x^t \Sigma x &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sigma_{ij} x_i x_j \\ \text{s. t:} \\ \sum_{t=1}^n \mu_i x_i &\geq \tau \\ \sum_{t=1}^n x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $x_i$  سهم یا وزن دارایی  $i$  در سبد سهام بهینه است و ماتریس کواریانس به صورت

<sup>1</sup> Li & Liu

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

است. به صورت متداول در مدل (۱) از برآوردهای (۳) به منظور تقریب بازده و کواریانس استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} \mu_i &= E(r_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it} \\ \sigma_{ij} &= E((r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j) \end{aligned} \quad (3)$$

هدف پژوهش حاضر برآورد پویای این دو پارامتر به کمک شبکه‌های حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت با رهیافت تجزیه چولسکی است. شبکه‌های حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت شکل گسترش یافته‌ای از شبکه‌های بازگشتی اند که در آن برای رفع مشکل محشوندگی گرادیان<sup>۱</sup> از مفهوم حافظه به همراه تعدادی گیت<sup>۲</sup> استفاده می‌شود. محشوندگی گرادیان بیان می‌کند که با بزرگ تر شدن دنباله شبکه‌های متصل به هم در شبکه‌های بازگشتی، الگوریتم گرادیان نزولی که در جهت آموزش شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرد، توانایی به روزرسانی اوزان را از دست می‌دهد. برای رفع این مشکل، واحد حافظه به شبکه‌های بازگشتی اضافه شده است و شبکه‌های حافظه بلندمدت-کوتاه مدت شکل گرفته‌اند. واحد حافظه می‌تواند اطلاعات زمینه را حفظ کند، اطلاعاتی را به حافظه بسپارد یا اطلاعاتی را فراموش کند. در ادامه، ساختار یک شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه مدت و پارامترهای قابل آموزش آن بیان می‌شود. در یک شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه مدت از  $c_t$  به عنوان بردار نشان دهنده حافظه یا زمینه استفاده می‌شود. اطلاعات لایه پنهان هر بخش از شبکه با بردار  $h_t$  و اطلاعات ورودی با  $x_t$  نشان داده می‌شود. در لحظه  $t$  اطلاعات  $h_{t-1}$  (مربوط به گذشته سیستم) و  $x_t$  (اطلاعات جدید) در اختیار شبکه قرار می‌گیرد و مطابق رابطه (۴) اطلاعات گذشته سیستم به  $h_t$  تغییر پیدا می‌کند و خروجی سیستم  $o_t$  محاسبه می‌شود.

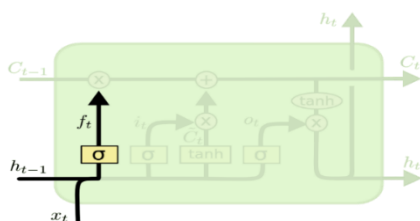
$$h_t = \sigma(Wx_t + Uh_{t-1} + b), \quad o_t = \sigma(Vh_t + b) \quad (4)$$

ماتریس‌های  $W, U, V, b$  پارامترهای قابل آموزش سیستم را شامل می‌شوند و  $\sigma$  نشان دهنده تابع سیگموئید است. در ادامه، بخشی از اطلاعات در اختیار؛ یعنی  $[x_t, h_{t-1}]$

<sup>1</sup> gradient vanishing

<sup>2</sup> gate

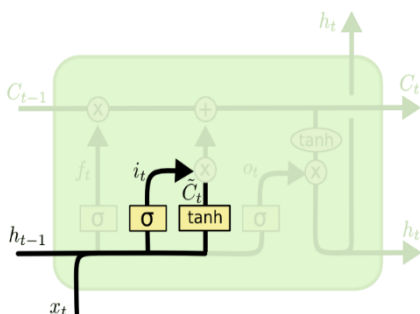
مطابق شکل ۱ فراموش می‌شود. در این رابطه نیز  $W_f$  و  $b$  به ترتیب ماتریس و بردارهای قابل آموزش به حساب می‌آیند.



$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f)$$

شکل ۱. نحوه فراموشی در شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت

بخشی از اطلاعات در دسترس مطابق شکل ۲ حفظ می‌شود.

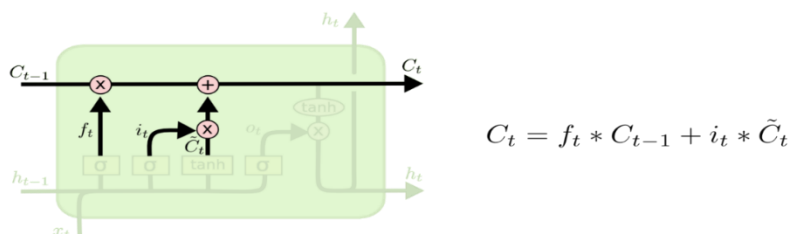


$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C)$$

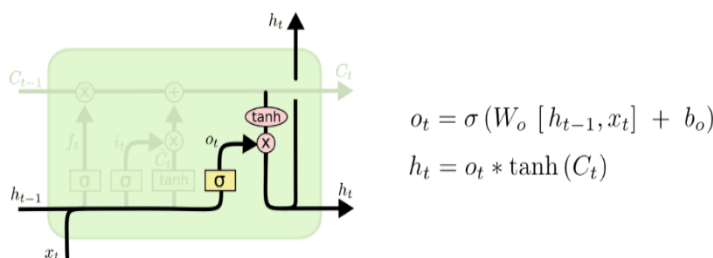
شکل ۲. نحوه یادسپاری در ساختار شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت

در نهایت، حافظه سیستم براساس بخشی از اطلاعات که باید فراموش شوند و بخشی از اطلاعات که باید به حافظه سپرده شوند به صورت شکل ۳ به روزرسانی می‌شود.



شکل ۳. به روزرسانی حافظه در شبکه حافظه بلندمدت و کوتاهمدت

در نهایت، خروجی و لایه پنهان شبکه (که ورودی شبکه بعدی است) در گام یا زمان  $t$  به صورت شکل ۴ به روزرسانی می شود.



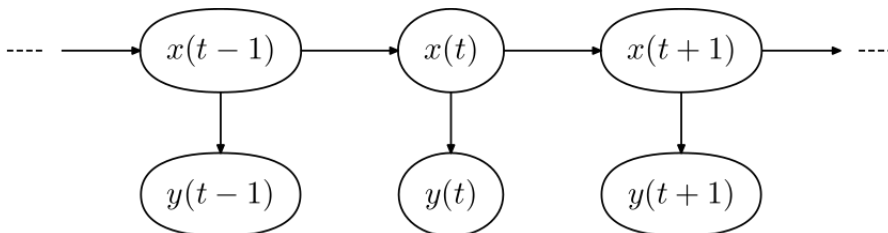
شکل ۴. به روزرسانی خروجی در شبکه حافظه بلندمدت و کوتاهمدت

ماتریس کواریانس بازده دارایی های تشکیل دهنده سبد سهام در مدل میانگین-واریانس، یک ماتریس متقارن و مثبت معین است و استفاده از رویکرد شبکه های حافظه بلندمدت و کوتاهمدت برای تخمین آن، تضمینی برای شرط مثبت معین بودن خروجی شبکه ارائه نمی دهد. نوآوری پژوهش حاضر استفاده از تجزیه چولسکی است. تجزیه چولسکی روشی پایه ای در جبر خطی عددی است که ماتریس های متقارن و مثبت را به حاصل ضرب ماتریس مثلثی پایینی در ترانزاده اش تجزیه می کند. این روش به دلیل سرعت و پایداری عددی بیشتر نسبت به روش های عمومی تر، مانند تجزیه LU کاربرد بیشتری دارد.

براین اساس، در صورتی که  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  دنباله ای از ماتریس های کواریانس تاریخی باشد، ابتدا هر ماتریس با استفاده از تجزیه چولسکی  $\Sigma_i = L_i L_i^T$  به حاصل ضربی از ماتریس پایین مثلثی در ترانزاده خودش تبدیل می شود. بدین صورت، به جای سری زمانی ماتریس کواریانس ها از سری زمانی  $L_1, L_2, \dots, L_n$  استفاده می شود و شبکه حافظه بلندمدت و کوتاهمدت با این داده ها و در نظر گرفتن وقفه ای زمانی مورد آموزش قرار می گیرد. خروجی

شبکه یک ماتریس پایین مثلثی است که بار دیگر با فرمول بازسازی  $\mathbb{Q}_i = L_i L_i^T$  به ماتریس کواریانس تبدیل می‌شود. در داده‌های آزمون، ابتدا بردار بازده دارایی‌ها و ماتریس کواریانس توسط شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت پیش‌بینی می‌شود و سپس در مدل میانگین-واریانس جایگزین می‌شود و توسط الگوریتم فراابتکاری تجمعی ذرات موردبهبهینه‌سازی قرار می‌گیرد.

در این پژوهش، برای بررسی عملکرد مدل پژوهش از دو رویکرد دیگر شامل مدل پنهان مارکوف و مدل گارچ نیز برای پیش‌بینی ماتریس کواریانس و سپس بهینه‌سازی سبد سهام استفاده شد که در ادامه معرفی می‌شوند. شکل ۵ معماری کلی یک نمونه مدل مارکوف را نشان می‌دهد. هر شکل بیضی یک متغیر تصادفی است. متغیر تصادفی  $x(t)$  یک حالت و متغیر تصادفی  $y(t)$  مشاهده در زمان  $t$  است. فلش‌ها به معنای وابستگی‌های شرطی‌اند. از شکل مشخص است که توزیع احتمال شرطی متغیر پنهان  $x(t)$  فقط به مقدار متغیر پنهان  $x(t-1)$  وابسته است که مشخصه مارکوف نامیده می‌شود. به‌طور مشابه، مقدار متغیر مشاهده  $y(t)$  تنها به مقدار متغیر حالت  $x(t)$  بستگی دارد.



شکل ۵. شکل مدل پنهان مارکوف

در مدل مارکوف دو نوع پارامتر وجود دارد: احتمال جابه‌جایی‌ها بین حالات و احتمال خروجی‌ها (یا مشاهدات). وظیفه یادگیری در مدل مارکوف یافتن بهترین احتمالات جابه‌جایی‌ها و خروجی‌ها براساس یک دنباله یا دنباله‌هایی از خروجی‌هاست. معمولاً این پارامترها به‌وسیله متد روش حداکثر درست‌نمایی براساس خروجی داده‌شده تخمین زده می‌شوند. هیچ الگوریتم قطعی برای حل این مسئله وجود ندارد؛ ولی برای پیدا کردن حداکثر

درست‌نمایی محلی می‌توان از الگوریتم‌های کارایی، مانند بام ولج<sup>۱</sup> یا بالدی چاوین<sup>۲</sup> استفاده کرد.

مدل دوم، مدل DCC-GARCH است که رویکردی قدرتمند و انعطاف‌پذیر برای مدل‌سازی ماتریس کواریانس شرطی در سبدهای مالی است. این مدل که توسعه‌ای از مدل‌های GARCH استاندارد و CCC-GARCH به‌شمار می‌رود، توانایی زیادی در ثبت و تحلیل پویایی هم‌بستگی‌ها بین دارایی‌های مالی در طول زمان دارد. مزیت کلیدی مدل DCC-GARCH در این است که واریانس (نوسان‌پذیری) شرطی هر دارایی را به‌صورت مجزا مدل‌سازی کرده و سپس هم‌بستگی شرطی بین دارایی‌ها را به‌عنوان مدلی مستقل و پویا پیاده‌سازی می‌کند. مدل DCC-GARCH را می‌توان به دو بخش اصلی تقسیم کرد. در مرحله اول فرض می‌شود که واریانس شرطی هر دارایی  $i$  در زمان  $t$ ؛ یعنی  $\sigma_{i,t}^2$ ، از یک مدل GARCH استاندارد تبعیت می‌کند:

$$\sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \alpha_{i,1} \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_{i,1} \sigma_{i,t-1}^2 \quad (5)$$

مرحله دوم، مدل‌سازی هم‌بستگی شرطی یا DCC است که پس از به‌دست‌آوردن واریانس‌های شرطی  $\sigma_{i,t}^2$ ، یک ماتریس نرمال‌شده از باقی‌مانده‌ها مطابق رابطه ایجاد می‌شود.

$$Z_{i,t} = \frac{\varepsilon_{i,t}}{\sigma_{i,t}} \quad (6)$$

مدل DCC فرض می‌کند که ماتریس هم‌بستگی شرطی  $R_t$  نیز از یک فرایند GARCH پیروی می‌کند.

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-1/2} \quad (7)$$

که در آن  $Q_t$  ماتریس کواریانس شرطی باقی‌مانده‌های نرمال‌شده است و از فرمول (۸) تبعیت می‌کند.

$$Q_t = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \bar{Q} + \lambda_1 \eta_{t-1} + \lambda_2 Q_{t-1} \quad (8)$$

در این فرمول  $\bar{Q}$  ماتریس کواریانس میانگین بلندمدت باقی‌مانده‌های نرمال‌شده است و  $\eta_{t-1}$  ماتریس کواریانس خارجی باقی‌مانده‌های نرمال‌شده  $z_{t-1} z_{t-1}^T$  است.  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  نیز

<sup>1</sup> Baum-welch algorithm

<sup>2</sup> Baldi-chauvin algorithm

پارامترهای DCC به حساب می‌آیند که پویایی هم‌بستگی را کنترل می‌کنند؛  $\lambda_1$  به تکانه‌های اخیر و  $\lambda_2$  به هم‌بستگی دوره قبل وابستگی دارد. با دراختیار داشتن واریانس‌های شرطی  $\sigma_{i,t}^2$  و ماتریس هم‌بستگی شرطی  $R_t$ ، ماتریس کواریانس شرطی جامع  $\Sigma_t$  برای سبد به شکل رابطه (۹) ساخته می‌شود.

$$\Sigma_t = D_t R_t D_t \quad (9)$$

که در آن  $D_t$  یک ماتریس قطری است و درایه‌های آن، انحرافات استاندارد شرطی  $\sigma_{i,t}$  دارایی‌های مختلف در زمان  $t$  را شامل می‌شوند.

#### ۴ یافته‌های پژوهش

دارایی‌های مورد استفاده در سبدهای پژوهش که در ادامه معرفی می‌شود، شامل ۱۰ شاخص عمده از بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۱۳۹۰ تا پایان خرداد ۱۴۰۴ است. انتخاب شاخص به مفهوم یک سبد سهام متنوع از سهام زیرمجموعه آن شاخص است. بدین صورت، تنوع‌پذیری که از اصول مهم در تشکیل سبد سهام است، رعایت می‌شود. باتوجه به دوره پژوهش، تعداد داده‌های روزانه برابر ۳۵۹۱ داده است. فهرست شاخص‌های مورد استفاده در سبد پژوهش مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱. فهرست دارایی‌های سبدهای سهام پژوهش

| عنوان شاخص       | شماره دارایی | عنوان شاخص   | شماره دارایی |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| سیمان            | ۱            | کانی فلزی    | ۶            |
| کاشی             | ۲            | کانی غیرفلزی | ۷            |
| فراورده‌های نفتی | ۳            | خودرو        | ۸            |
| قند و شکر        | ۴            | شیمیایی      | ۹            |
| مواد دارویی      | ۵            | ماشین‌آلات   | ۱۰           |

افق زمانی سبدهای سهام پژوهش، هفتگی و هر هفته پنج روز کاری در نظر گرفته شده است. براین اساس ۷۱۸ بازده هفتگی به‌دست آمد. در ادامه و در تمام مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام مورد بحث، از ۷۵ درصد داده‌ها برای آموزش مدل و از ۲۵ درصد برای آزمون (تست) عملکرد سودآوری استفاده شده است. همچنین، برای بهینه‌سازی تمام سبدها از

الگوریتم تجمعی ذرات<sup>۱</sup> استفاده شد. الگوریتم تجمعی ذرات یک الگوریتم بهینه‌سازی الهام گرفته از رفتار اجتماعی دسته‌ای از پرندگان یا ماهیان است که برای یافتن راه‌حل بهینه برای مسائل پیچیده به کار می‌رود. در این الگوریتم هر «ذره» نماینده راه‌حلی بالقوه در فضای جست‌وجوست و با حرکت در این فضا، به سمت بهترین موقعیت‌های کشف‌شده توسط خودش (pbest) و بهترین موقعیت کشف‌شده توسط کل جمعیت (gbest) حرکت می‌کند. در طول فرایند بهینه‌سازی، هر ذره موقعیت و سرعت خود را براساس بهترین موقعیت قبلی خود و بهترین موقعیت کل جمعیت به‌روزرسانی می‌کند. این حرکت به گونه‌ای است که ذرات به تدریج به سمت نواحی امیدوارکننده در فضای جست‌وجو همگرا می‌شوند. تنظیمات الگوریتم تجمعی ذرات مورد استفاده در پژوهش به صورت جدول ۲ است.

جدول ۲. تنظیمات پارامترهای PSO

| پارامتر                                                                       | مقدار |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------|
| تعداد راه‌حل‌های بالقوه در هر نسل                                             | ۲۰۰   |
| حداکثر تعداد نسل‌هایی که الگوریتم اجرا می‌شود                                 | ۵۰۰   |
| میزان تأثیر موقعیت قبلی ذره بر سرعت فعلی؛ کاهش آن باعث همگرایی سریع‌تر می‌شود | ۰/۷   |
| میزان تمایل ذره به بازگشت به بهترین موقعیت قبلی خود                           | ۱/۵   |
| میزان تمایل ذره به حرکت به سمت بهترین موقعیت کل جمعیت                         | ۱/۵   |
| بازه مجاز برای هر متغیر در راه‌حل.                                            | [۰،۱] |

#### ۴-۱ رویکرد شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت با رهیافت تجزیه چولسکی

در این مدل، ابتدا ماتریس‌های کواریانس بر داده‌های آموزشی با توجه به پنجره زمانی مطابق جدول ۳ محاسبه و سپس به کمک تجزیه چولسکی به سری زمانی ماتریس‌های پایین مثلثی تبدیل می‌شوند. سپس به کمک وقفه زمانی (تأخیر)، شبکه مورد آموزش قرار می‌گیرد. شبکه آموزش دیده برای پیش‌بینی ماتریس کواریانس هفته آتی تست مورد استفاده قرار می‌گیرد. بردار بازده دارایی‌ها برای هفته پیش رو نیز برابر میانگین بازده دارایی‌ها در پنجره زمانی در نظر گرفته می‌شود (پنجره زمانی از هفته ماقبل هفته تست شروع و به اندازه طول پنجره به عقب بر می‌گردد). بدین صورت، رویکرد مورد استفاده به صورت غلتان است و داده‌های مورد استفاده برای آموزش مدل همواره به‌روزترین داده‌ها هستند. با در اختیار داشتن بازده و

<sup>1</sup> Particle Swarm Optimization: PSO

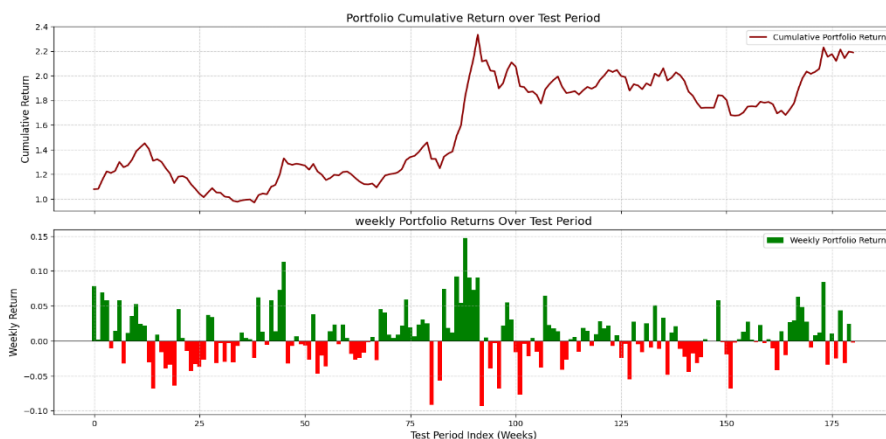
کواریانس، در نهایت وزن سبد بهینه میانگین-واریانس به کمک الگوریتم بهینه‌سازی تجمعی ذرات محاسبه می‌شود. برای پیاده‌سازی این رویکرد از کتابخانه پای تورچ<sup>۱</sup> در زبان برنامه‌نویسی پایتون استفاده شد. پارامترهای مورد استفاده در این مدل براساس جدول ۳ تعیین شد. باتوجه به ده دارایی و مثلثی بودن ماتریس ورودی، ابعاد ورودی برابر  $10 \times 55$  است.

جدول ۳. پارامترهای مورد استفاده در رویکرد اول

| پارامتر                                        | مقدار                          |
|------------------------------------------------|--------------------------------|
| اندازه پنجره زمانی برای محاسبه ماتریس کواریانس | ۳۰                             |
| تأخیر (وقفه زمانی)                             | ۱۰                             |
| ابعاد ورودی                                    | ۵۵                             |
| اندازه لایه پنهان                              | ۶۴                             |
| ابعاد خروجی                                    | ۵۵                             |
| تابع بهینه‌ساز                                 | optim.Adam: بهینه‌ساز آدام     |
| نرخ یادگیری                                    | ۰/۰۰۱                          |
| معیار آموزش                                    | nn.MSELoss: میانگین مربعات خطا |

عملکرد مدل اصلی پژوهش؛ یعنی شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت با رهیافت تجزیه چولسکی بر داده‌های تست در شکل ۶ ارائه شده است. شکل زیرین بازده‌های هفتگی کسب‌شده و شکل بالا، بازده تجمعی کسب‌شده بر داده‌های تست است.

<sup>۱</sup> Pytorch



شکل ۶. بازده‌های هفتگی و بازده تجمعی بر داده‌های تست با رویکرد LSTM+CHOLOSKEY

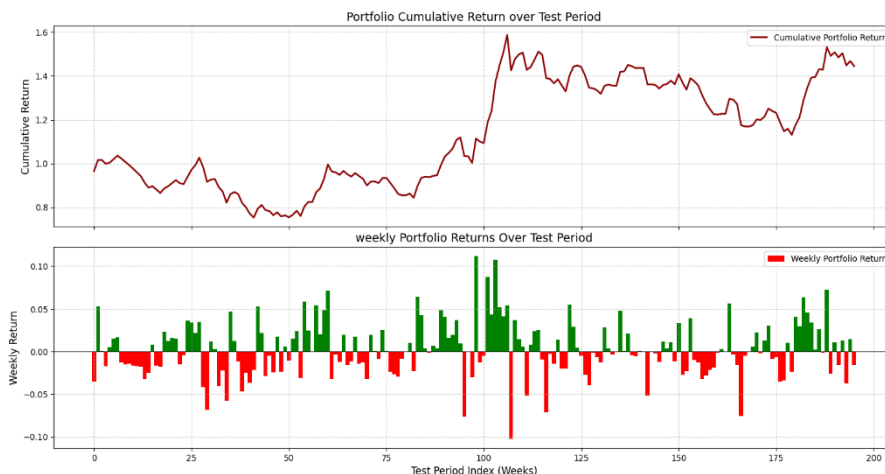
#### ۲-۴ رویکرد مدل پنهان مارکوف

در این رویکرد سری زمانی قابل مشاهده برابر سری بازده هفتگی ده دارایی است و توزیع بردار بازده به صورت نرمال چندمتغیره (در اینجا توزیع نرمال ده متغیره) در نظر گرفته می‌شود. برای برنامه‌نویسی این مدل از کتابخانه `hmmlearn` در زبان برنامه‌نویسی پایتون با پارامترهای جدول ۴ استفاده شد.

جدول ۴. پارامترهای مورد استفاده در مدل پنهان مارکوف

| پارامتر               | مقدار                              |
|-----------------------|------------------------------------|
| نوع خروجی             | توزیع نرمال چندمتغیره              |
| نوع و تعداد فضای حالت | گسسته و شامل ۳ حالت                |
| توزیع اولیه حالات     | $A = [0.33 \quad 0.33 \quad 0.33]$ |

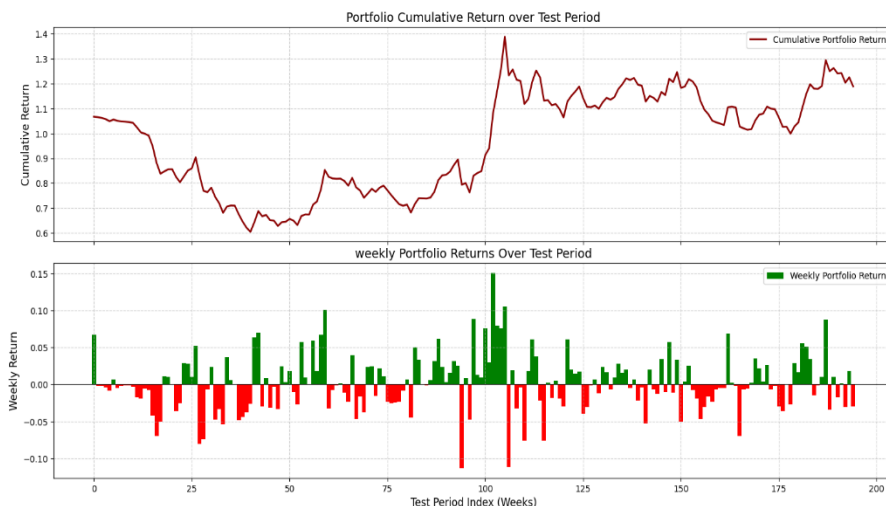
بدین صورت، بردار بازده و ماتریس کواریانس برای هفته‌های تست به صورت یکجا محاسبه می‌شود و الگوریتم تجمعی ذرات نیز سبد بهینه میانگین-واریانس را به دست می‌دهد. عملکرد مدل پنهان مارکوف بر داده‌های تست در شکل (۲) ارائه شده است. شکل زیرین بازده‌های هفتگی کسب‌شده و شکل بالا، بازده تجمعی کسب‌شده روی داده‌های تست است.



شکل ۷. بازده های هفتگی و بازده تجمعی بر داده‌های تست با رویکرد پنهان مارکوف

### ۳-۴ رویکرد DCC-GARCH

در این رویکرد برای پیش‌بینی ماتریس کواریانس از مدل پایه  $GARCH(1,1)$  و برای کدنویسی آن از کتابخانه ARCH در محیط برنامه‌نویسی پایتون استفاده شد. عملکرد مدل DCC-GARCH بر داده‌های تست در شکل (۳) ارائه شده است. شکل زیرین بازده‌های هفتگی کسب‌شده و شکل بالا، بازده تجمعی کسب‌شده بر داده‌های تست است.



شکل ۱. بازده‌های هفتگی و بازده تجمعی بر داده‌های تست با رویکرد DCC-GARCH

#### ۴-۴ مقایسه عملکرد مدل‌ها

برای مقایسه عملکرد مدل‌های سه‌گانه پژوهش، مقادیر پنج معیار مطابق جدول ۵ بر هفته‌های تست استخراج شد.

جدول ۵. مقایسه عملکرد مدل‌های سه‌گانه پژوهش

| معیار               | LSTM با رهیافت تجزیه چولسکی | مدل پنهان مارکوف | مدل DCC-GARCH |
|---------------------|-----------------------------|------------------|---------------|
| میانگین بازده هفتگی | ۰/۰۰۵۰                      | ۰/۰۰۲۴           | ۰/۰۰۱۶        |
| ریسک (انحراف معیار) | ۰/۰۳۸                       | ۰/۰۳۱۸           | ۰/۰۳۷۸        |
| نسبت شارپ           | ۰/۱۳                        | ۰/۰۷             | ۰/۰۴۲۲        |
| حداکثر افت سرمایه   | ٪۳۳                         | ٪۲۸              | ٪۴۳           |
| بازده تجمعی         | ۲/۴۲                        | ۱/۴۶             | ۱۹/۱          |

عملکرد سودآوری مدل شبکه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت با رهیافت تجزیه چولسکی در جدول ۵ ارائه شده است. بدین صورت، انتظار می‌رود به کمک این سبد بتوان به میانگین بازده هفتگی ۰/۰۰۵ با تحمل ریسک ۰/۰۳۸ دست یافت. نسبت پاداش به ریسک یا نسبت شارپ این رویکرد نیز ۰/۱۳ است. بازده تجمعی روی کل دوره تست؛ یعنی ۱۷۹ هفته برابر ۲/۴۲ است. همچنین، باتوجه به حداکثر افت سرمایه، سبد نسبت به بلندترین قلّه خود افت

۳۳ درصدی داشته است. جدول ۵ نشان می‌دهد که در رویکرد پنهان مارکوف میانگین بازده هفتگی و بازده تجمعی و نسبت شارپ در مقایسه با رویکرد اصلی پژوهش به نصف کاهش یافته‌اند؛ درحالی‌که با کمی اغماض، ریسک و حداکثر افت سرمایه در یک سطح باقی مانده‌اند. همچنین، نتایج جدول ۵ نشان می‌دهد که رویکرد DCC-GARCH در مقایسه با دو رویکرد دیگر، ضعیف‌ترین عملکرد را داشته است.

## ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

بازارهای مالی به‌طور ذاتی ویژگی‌هایی غیرایستا دارند. بازده دارایی‌ها، واریانس‌های آن‌ها، و بخصوص کواریانس بین دارایی‌های مختلف تحت تأثیر عوامل متعددی قرار دارند که در طول زمان تغییر می‌کنند. اتکا به تخمین‌های ایستا که تنها براساس داده‌های تاریخی گذشته محاسبه شده‌اند، اغلب به نتایج گمراه‌کننده‌ای منجر می‌شود. برای مثال، یک ماتریس کواریانس ایستا ممکن است هم‌بستگی بالایی بین دو دارایی نشان دهد که در شرایط فعلی بازار دیگر وجود ندارد؛ یا برعکس، هم‌بستگی قوی که به‌تازگی شکل گرفته را نادیده بگیرد. این امر به تخصیص دارایی نادرست، افزایش ریسک غیرمنتظره، و در نهایت کاهش عملکرد سبد سرمایه‌گذاری منجر می‌شود. بنابراین، استفاده از روش‌هایی که بتوانند مدل‌سازی این تغییرات پویا باشند را درک کنند، برای دستیابی به سبدهای بهینه و مقاوم در برابر نوسانات بازار امری ضروری است.

شبکه‌های عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت به دلیل معماری خود می‌توانند یاد بگیرند وابستگی‌های بلندمدت در داده‌های ترتیبی را به خاطر بسپارند. همین موضوع باعث شده است ابزاری قدرتمند برای مدل‌سازی پویایی‌های پیچیده بازار به حساب بیایند. خلاف شبکه‌های عصبی بازگشتی ساده که ممکن است با مشکل محوشدن گرادیان در توالی‌های طولانی مواجه شوند، شبکه‌های عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت با استفاده از مکانیزم‌های دروازه‌ای (گیت ورودی، گیت فراموشی، گیت خروجی) قادرند اطلاعات مرتبط را مدت طولانی‌تری حفظ کنند. این ویژگی‌ها شبکه‌های عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت را برای پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی مناسب می‌سازد، که اغلب الگوهای پیچیده و وابستگی‌های غیرخطی دارند. با استفاده از شبکه‌های عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت می‌توان پارامترهای سبد سهام، به‌ویژه ماتریس کواریانس را به‌صورت پویا پیش‌بینی کرد؛ یعنی با دریافت داده‌های جدید، مدل می‌تواند به‌روزرسانی پیش‌بینی‌های خود را به‌روزرسانی کند و تصویری نزدیک‌تر به واقعیت بازار ارائه دهد.

یکی از چالش‌های فنی مهم در استفاده از شبکه‌های شبکه‌های عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت برای پیش‌بینی ماتریس کواریانس، تضمین این است که ماتریس پیش‌بینی شده یک ماتریس «مثبت معین» باشد. خروجی مستقیم یک شبکه عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت، به‌طور پیش‌فرض، تضمینی برای مثبت معین بودن ندارد و ممکن است ماتریس حاصل، دارای مقادیر منفی در مقادیر ویژه یا غیرقابل محاسبه بودن معکوس آن باشد که آن را برای کاربردهای بهینه‌سازی نامناسب می‌سازد. برای حل این مشکل، پژوهش حاضر از تجزیه چولسکی بهره می‌برد. تجزیه چولسکی یک ماتریس هرمیتی و مثبت معین را به حاصل ضرب یک ماتریس پایین‌مثنی و ترانهاده آن تجزیه می‌کند. با بازتعریف مسئله، می‌توان از شبکه‌های عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت برای پیش‌بینی پارامترهای ماتریس پایین‌مثنی استفاده کرد.

در این پژوهش با هدف بهینه‌سازی پویای سبد سهام میانگین-واریانس متشکل از ده شاخص عمده بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۱۳۹۰ تا پایان خرداد ۱۴۰۴، عملکرد سه رویکرد پیشرفته شامل مدل شبکه‌های عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت با تجزیه چولسکی، مدل مارکوف پنهان، و مدل DCC-GARCH مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفت. افق زمانی هفتگی سبب شد تا ۷۱۸ بازده محاسبه و به‌عنوان ورودی مدل‌ها مورداستفاده قرار گیرد. نتایج حاصل از رویکرد شبکه عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت با تجزیه چولسکی نشان داد که این مدل توانایی بالایی در استخراج الگوهای پویای موجود در ماتریس کواریانس و پیش‌بینی بازده‌ها دارد و در مقایسه با دو مدل دیگر از منظر شاخص‌های کارایی عملکرد برتری محسوسی ارائه کرده است. میانگین بازده هفتگی این مدل برابر ۰/۰۰۵۰، ریسک ۰/۰۳۸، نسبت شارپ ۰/۱۳، و بازده تجمعی ۲/۴۲ برآورد شد که نسبت به مدل پنهان مارکوف و DCC-GARCH سودآوری بیشتر و پایداری نسبی بالاتری دارد. در مقابل، مدل پنهان مارکوف با میانگین بازده ۰/۰۲۴ و بازده تجمعی ۱/۴۶ پویایی محدودی دارد و مدل DCC-GARCH با وجود سادگی و تثوریک‌بودن ساختار، کمترین عملکرد را در بازدهی و کنترل ریسک نشان داد (بازده تجمعی ۱/۱۹ و نسبت شارپ ۰/۰۴۲). این نتایج حکایت از آن دارد که مدل‌های یادگیری عمیق، به‌ویژه ترکیب شبکه‌های عصبی حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت و تجزیه چولسکی، قابلیت مناسب‌تری برای مدل‌سازی ساختار هم‌خطی و غیربازگشتی و همچنین الگوهای زمانی پیچیده بازار سرمایه ایران دارند.

پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی از معماری‌های پیشرفته‌تری، مانند شبکه‌های تحول‌گر<sup>۱</sup> یا شبکه‌های هیبریدی CNN-LSTM برای بهبود دقت پیش‌بینی ماتریس کواریانس استفاده شود. افزون بر آن، بهره‌گیری از داده‌های اقتصاد کلان و شاخص‌های رفتاری بازار (نظیر احساس سرمایه‌گذار یا حجم معاملات) به ارتقای کیفیت برآورد ریسک کمک می‌کند. همچنین، بررسی عملکرد مدل ترکیبی در افق‌های زمانی کوتاه‌تر، مانند روزانه یا بلندمدت‌تر از هفتگی، و ارزیابی تأثیر هزینه‌های معاملاتی در نتایج بازدهی واقعی، مسیرهای ارزشمندی برای توسعه پژوهش‌های آتی در مدیریت بهینه سبد سهام در بازارهای نوظهوری همچون ایران فراهم می‌آورد.

### فهرست منابع

- اسفندیار، م.، کرامتی، م.ع.، و غلامی جمکرانی، ر. (۱۴۰۱). بهینه‌سازی پورتفوی سهام در بورس اوراق بهادار تهران (کاربرد رهیافت یادگیری تقویتی). *مدلسازی اقتصادی*، ۱۶ (۵۸)، ۵۱-۶۶.
- اقتصاد، ا.ع. و محمدی، ع. (۱۴۰۲). بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به کمک پیش‌بینی بازده مورد انتظار با استفاده از روش‌های شبکه عصبی LSTM، جنگل تصادفی و ARIMA چشم‌انداز مدیریت مالی، ۱۳ (۴۳)، ۹-۲۸.
- کیانی‌زاده، ح.، باغانی، ع.، و حمیدیان، م. (۱۴۰۲). مقایسه دقت مدل‌های منتخب یادگیری ماشین جهت پیش‌بینی قیمت سهام در بورس اوراق بهادار. *بورس اوراق بهادار*، ۱۶ (۶۲)، ۷۵-۱۰۲.
- هراتی‌زاده، س.، و رضایی، ف. (۱۴۰۲). ارائه روشی جدید برای بهره‌گیری از یادگیری ماشین در فرآیند بهینه‌سازی سبد سهام. *تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات*، ۸ (۲)، ۵۲۷-۵۳۹.
- Agal, S., Raulji, K., & Odedra, N. D. (2025). A machine learning approach to risk based asset allocation in portfolio optimization. *Scientific Reports*, 15, 42263.
- Espiga-Fernández, F., García-Sánchez, Á., & Ordieres-Meré, J. (2024). A systematic approach to portfolio optimization: A comparative study of reinforcement learning agents, market signals, and investment horizons. *Algorithms*, 17(12), 570.
- Fan, Y. (2025). Enhancing Investment Strategies with LSTM-based Stock Prediction and Mean-Variance Portfolio Optimization. *Advances in Economics, Management and Political Sciences*, 182, 110-117.

<sup>1</sup> transformer

- Kevin, J., & Yugopuspito, P. (2025). Hybrid LSTM and PPO networks for dynamic portfolio optimization. *arXiv*.
- Li, H., & Liu, T. (2023). Portfolio optimization based on the LSTM forecasting model. *Advances in Economics, Management and Political Sciences*, 48, 97–106.
- Li, X. (2025). LSTM-based portfolio optimization strategy. *Highlights in Business, Economics and Management*, 50, 347–354.
- Majumder, R., Ji, Q., & Neerchal, N. K. (2024). Optimal stock portfolio selection with a multivariate hidden markov model. *arXiv*.
- Taljaard, B. (2025). Regime-based portfolio optimisation: A hidden Markov model approach for fixed income portfolios. *European Stability Mechanism Working Paper*.

Journal of Monetary &amp; Banking Research

Vol. 19, No. 68, Summer 2026

pages 355-380

## Mean-Variance Portfolio Based on Covariance Matrix Prediction with LSTM Networks Using Cholesky Decomposition Approach

Seifollah Heidari<sup>1</sup>Amir Mohammadzadeh<sup>2</sup>Soheila Khishtandar<sup>3</sup>

Received: 15-Apr -2026

Accepted: 01-Jun -2026

### Abstract

The Markowitz mean-variance model is based on minimizing risk at different expected return levels. However, the key to success in this approach relies on accurately predicting the return vector and the dynamic covariance matrix among assets, as these relationships are constantly changing, and understanding this dynamism is crucial for achieving an optimal portfolio. The present research utilizes Long Short-Term Memory (LSTM) networks for the dynamic prediction of the covariance matrix, with its innovation lying in addressing the issue of the predicted covariance matrix not being positive definite by employing the Cholesky decomposition approach. In this study, the mean-variance approach was used to optimize a portfolio consisting of 10 major Tehran Stock Exchange indices over the period 1390 to 1404, comparing three models: LSTM networks with Cholesky decomposition, Hidden

<sup>1</sup> PhD Candidate, Islamic Azad University, Qazvin Branch, Faculty of Management and Accounting; [4051107663@iau.ir](mailto:4051107663@iau.ir) (This article is derived from the PhD dissertation of Seifollah Heidari)

<sup>2</sup> Associate Professor, Islamic Azad University, Qazvin Branch, Faculty of Management and Accounting (Corresponding Author); [amir126@iau.ac.ir](mailto:amir126@iau.ac.ir)

<sup>3</sup> Assistant Professor, Islamic Azad University, Qazvin Branch, Faculty of Management and Accounting; [soheila.khishtandar@iau.ac.ir](mailto:soheila.khishtandar@iau.ac.ir)

Markov, and DCC-GARCH. The results showed that the LSTM model, with a weekly average return of 0.0050, risk of 0.038, Sharpe ratio of 0.13, and cumulative return of 2.42, demonstrated significant superiority over the other two models in controlling risk and profitability. This superiority stems from LSTM's ability to model the complex and dynamic patterns of the Iranian capital market.

**Keywords:** Long Short-Term Memory Network; Cholesky Decomposition, Hidden Markov Model, DCC-GARCH Model

**JEL Classification:** G11, C45, C53, C61, G17